2.3 Einige alternative Regeln (im Kontext der klassischen Entscheidungstheorie

2.3.1 Die Laplace Regel

Foto:
http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/gebiete/
wahrscheinlichkeitstheorie/wahrscheinlichkeitstheorie.html
[Stand: 25.06.13]

Def. 2.68 (Laplace-Regel)

Gegeben sei das datenfreie Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit endlichem $\Theta = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$.
Die Kriteriumsfunktionen

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \quad \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \end{aligned} \tag{2.15}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathrm{I\!A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \end{aligned} \tag{2.16}$$

heißen *Laplace-Regel*.

Bem. 2.69

Die beiden Kritetiumsfunktionen (2.15) und (2.16) liefern dieselbe Ordnung auf der Aktionenmenge.

a) Die Kriteriumsfunktion (2.16) entspricht einer Bayes-Regel mit Priori-Verteilung $\pi(\cdot) = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ (mit $m = |\Theta|$), also einer Gleichverteilung auf Θ.
Damit geometrisch: Höhenlinien senkrecht auf Equilisator-Linie.

b) Viele Eigenschaften der optimalen Aktion können deshalb aus den in Kapitel 2.2 formulierten Sätzen über Bayes-Regeln abgeleitet werden. (Zulässigkeit, Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen,...)

c) Rechtfertigung durch „Prinzip vom unzureichenden Grund“ (Laplace): Wenn nichts dafür spricht, dass eines der Elementarereignisse wahrscheinlicher ist als die anderen, dann sind sie gleichwahrscheinlich, also

$$\pi(\{\vartheta_1\}) = \pi(\{\vartheta_2\}) = \ldots = \pi(\{\vartheta_m\}).$$

Da

$$\pi(\{\vartheta_1\}) + \pi(\{\vartheta_2\}) + \ldots + \pi(\{\vartheta_m\}) = 1$$

ist zwangsläufig

$$\pi(\{\vartheta_j\}) = \frac{1}{m}\,, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

d) Verallgemeinerung auf unendliches Θ:
Theorie der nichtinformativen Priori-Verteilungen, z.B. stetige Gleichverteilung oder andere, die Information (in je anderem Sinn) minimierende Verteilungen.
Wichtig v.a. im Kontext der Inferenz / statistischen Entscheidungstheorie i.e.S., wird dort besprochen.

Bem. 2.70 (Beispiel und Kritik)

Abwandlung von Beispiel aus Kapitel 1.3.2, Lotterie
Urnen bestehend aus einer unbekannten Anzahl von grünen, blauen und restlichen (rote, schwarze, violette) Kugeln.
Man kann entweder

- a_1 nicht spielen,
- a_2 zum Preis von $c_g = 60$€ auf grün setzen oder
- a_3 zum Preis von $c_b = 90$€ auf blau setzen.

Es wird eine Kugel zufällig gezogen. Man erhält 240€, wenn die Kugel, auf die man gesetzt hat, gezogen wird.

	$\{g\}$	$\{b\}$	$\{\text{rest}\}$		
a_1	0	0	0	0	
a_2	180	-60	-60	20	$\leftarrow$ optimale Aktion
a_3	-90	150	-90	-10	

2.3.2 Die Minimax-Regret-Regel von L.J. Savage, auch Niehans-Savage-Regel genannt

Def. 2.71 (Minimax-Regret-Aktion)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ in Verlustform.
Seien $\mathbb{A}$ und Θ endlich, $\Theta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_m\}$, $\mathbb{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Das datenfreie Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, r(\cdot))$ in Verlustform mit

$$\begin{aligned} r : \mathbb{A} \times \Theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_i, \vartheta_j) &\longmapsto r(a_i, \vartheta_j) \end{aligned}$$

und

$$r(a_i, \vartheta_j) = \max_{\ell=1,\ldots,n} (u(a_\ell, \vartheta_j)) - u(a_i, \vartheta_j) \qquad (2.17)$$

$$\text{bzw.} \qquad r(a_i, \vartheta_j) = l(a_i, \vartheta_j) - \min_{\ell=1,\ldots,n} (l(a_\ell, \vartheta_j)) \qquad (2.18)$$

heißt **induziertes Regret Problem** bzw. **induzierte Regret-Tafel**.

Jedes $a^* \in \mathbb{A}$ mit

$$\max_{j=1,\ldots,m} r(a^*, \vartheta_j) \leq \max_{j=1,\ldots,m} r(a, \vartheta_j) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{A}$$

heißt **Minimax-Regret-Aktion**.

Bsp. 2.72 (Beispiel und Kritik)

Proposition 2.73 (Bayes-Aktionen in Regrettafeln)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ und die Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$. Eine Aktion a^* ist genau dann Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$, wenn a^* Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ im induzierten Regret-Problem ist.

2.3.3 Das Hurwicz-Kriterium

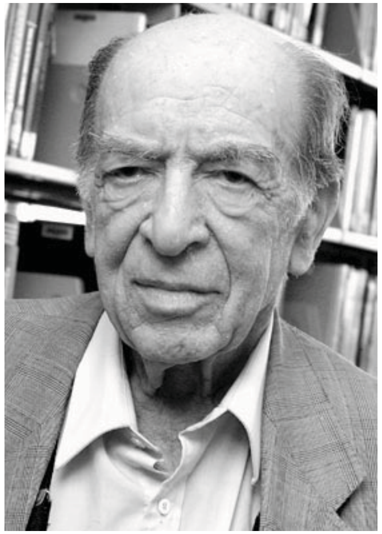

Foto: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2007/hurwicz-facts.html
[Stand: 25.06.13]

Def. 2.74 (Hurwicz-Kriterium)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit $|\Theta| < \infty$, sowie ein Parameter $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \Phi(a) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi(a) = \alpha \max_j u(a, \vartheta_j) + (1-\alpha) \min_j u(a, \vartheta_j) \tag{2.19}$$

heißt *Hurwicz-Kriterium* zum *Optimismusparameter* α.

2.3.4 Das Erfahrungskriterium von J.L. Hodges und E.L. Lehmann (1952)

Def. 2.75 (Erfahrungskriterium von Hodges & Lehmann)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, $|\Theta| < \infty$, $\mu \in [0, 1]$ und eine Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \Phi(a) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi(a) =& \mu \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \pi(\{\vartheta_j\}) \right) \\ &+ (1 - \mu) \cdot \left(\min_j (u(a, \vartheta_j)) \right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

heißt *Erfahrungskriterium von Hodges und Lehmann zum Vertrauensparameter* μ.